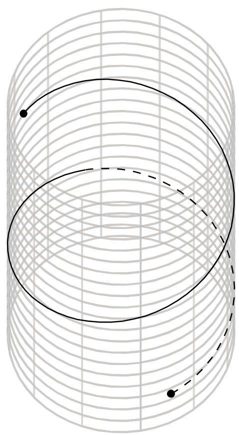
Εκδόσεις SupM

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Ελευθέριος Μαρκεσίνης - Κωνσταντίνος Μπιζάνος



- **Αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας**
- **Στρατηγικές και μεθοδολογίες επίλυσης ασκήσεων**
- **Πάνω από 120 λυμένα θέματα εξετάσεων με πλήρεις λύσεις**

SupM
ΕΚΔΟΣΕΙΣ
info@supmmathcourses.gr

Σελιδοποίηση-επιμέλεια εξωφύλλου:
Αντώνης Ζιώγας
6957200705 - 2130386275
zantonis@gmail.com

Εκτύπωση:

ΠΑΠ press
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ
ΕΤΙΚΕΤΟΠΟΙΪΑ

Αικατερίνη Παπαθανασίου
Τηλ.: 22310 34000

ISBN: 978-618-87682-0-8

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Κεφάλαιο 2: Η Έννοια της Καμπύλης

- **Θέματα:** Παραμετρικές καμπύλες, μοναδιαία ταχύτητα, αναπαραμέτρηση.
- **Προτεινόμενος χρόνος μελέτης:** 6-8 ώρες
- **Προτεινόμενα Θέματα Εξετάσεων για μελέτη:**
  Θ.Ε. 2.1, **Θ.Ε. 2.3**, Θ.Ε. 2.5, Θ.Ε. 2.7

Κεφάλαιο 3: Καμπύλες στον Χώρο

- **Θέματα:** Καμπυλότητα, στρέψη, τριέδρο Frenet.
- **Προτεινόμενος χρόνος μελέτης** : 8-10 ώρες
- **Προτεινόμενα Θέματα Εξετάσεων για μελέτη:**
  Θ.Ε. 3.1, Θ.Ε. 3.3, Θ.Ε. 3.4, **Θ.Ε. 3.6**, **Θ.Ε. 3.9**, Θ.Ε. 3.12

Κεφάλαιο 4: Καμπύλες στο Επίπεδο

- **Θέματα:** Προσημασμένη καμπυλότητα, γωνία περιστροφής.
- **Προτεινόμενος χρόνος μελέτης:** 6-8 ώρες
- **Προτεινόμενα Θέματα Εξετάσεων για μελέτη:**
  Θ.Ε. 4.1, Θ.Ε. 4.2, Θ.Ε. 4.5

Κεφάλαιο 5: Επιφάνειες και Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή

- **Θέματα:** Παραμετρικές επιφάνειες, τοπικές ισομετρίες.
- **Προτεινόμενος χρόνος μελέτης:** 10-12 ώρες

(β) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $v \in V$.

■

Ερώτηση

Πως συνδέονται οι γραμμικές απεικονίσεις με τους πίνακες στην ειδική περίπτωση όπου V, W είναι διανυσματικοί υπόχωροι διάστασης 2 ;

Απάντηση. Θεωρούμε $\hat{v} = (v_1, v_2)$ και $\hat{w} = (w_1, w_2)$ βάσεις των V, W αντίστοιχα. Τότε έχουμε ότι $f(v_1), f(v_2) \in W$, συνεπώς υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(v_1) = a \cdot w_1 + c \cdot w_2 \quad \text{και} \quad f(v_2) = b \cdot w_1 + d \cdot w_2$$

Ο πίνακας

$$A = (f : \hat{v}, \hat{w}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

λέγεται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** f ως προς τις βάσεις $\hat{v}, \hat{w}$. [9] ■

1.4 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Οι έννοια των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων θα φανεί εξαιρετικά χρήσιμη στο Κεφάλαιο 6, όπου θα μιλήσουμε για την έννοια των κύριων καμπυλοτήτων και διανυσμάτων μιας επιφάνειας. Παρόλα αυτά σκοπός δεν είναι να αναπτύξουμε την γενική θεωρία των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, παρά μόνο να αναφέρουμε τα κατάλληλα εργαλεία για τους σκοπούς των επόμενων κεφαλαίων. Για αυτό το λόγο, οι πίνακες με τους οποίους θα ασχοληθούμε είναι όλοι πραγματικοί 2×2 και οι αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις θα είναι της μορφής $f\colon V \to V$, όπου V είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2. Τον χώρο των 2×2 πινάκων θα τον συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ και των αντίστοιχων στηλών $\mathbb{R}^{2\times 1}$, δηλαδή

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^{2\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ερώτηση

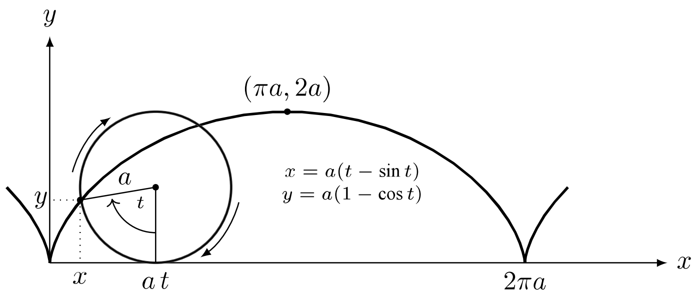
Έστω $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ και $X \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ με $X \neq 0$. Πότε το X λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A ;

Απάντηση. Το X λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του A αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

Το λ καλείται **ιδιοτιμή** του A. ■

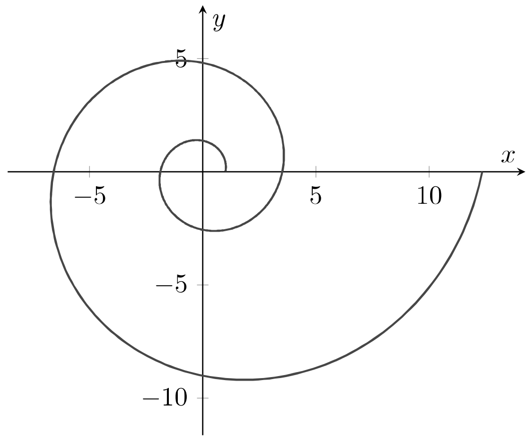
[9] Με βάση των παραπάνω ορισμό έχει σημασία η διάταξη των στοιχείων της βάσης. Στην περίπτωση, όπου $\hat{v} = (v_2, v_1)$, τότε ο αντίστοιχος πίνακας θα ήταν $A = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$.



(στ) **Λογαριθμική Σπείρα.** Κάθε παραμετρημένη καμπύλη της μορφής

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \big(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t\big)$$

λέγεται **λογαριθμική σπείρα** .



(ζ) **Γράφημα Λείας Συνάρτησης** Έστω $f\colon I \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Το γράφημα της f είναι η παρακάτω καμπύλη στάθμης

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$$

Μια προφανής παραμέτρηση της $\mathrm{Gr}(f)$ είναι η παραμετρημένη καμπύλη

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

■

Ερώτηση

Αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2$ καμπύλη, όπου I διάστημα και $t_0 \in I$, τι ονομάζουμε εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο σημείο $\gamma\,(t_0)$;

Απάντηση. Η γ λέγεται **ομαλή** αν $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, για κάθε $t \in I$. [4] ■

2.3 Μεθοδολογία Εύρεσης Αναπαραμέτρησης Μοναδιαίας Ταχύτητας

Ερώτηση

Είναι εύκολο να δουμε ότι κάθε καμπύλη μοναδιαιάς ταχύτητας είναι ομαλή. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει αναγκαστικά ! Τι ισχύει όμως ; **Ισχύει ότι κάθε ομαλή καμπύλη έχει αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας.** Πως μπορούμε να βρούμε μια τέτοια αναπαραμέτρηση όμως ;

Απάντηση. **Μεθοδολογία Εύρεσης Αναπαραμέτρησης Μοναδιαίας Ταχύτητας**

- Υπολογίζουμε $\|\dot{\gamma}\|$ και μια συνάρτηση μήκους s ως προς οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης.
- Αφού $\dot{s} = \|\dot{\gamma}\| \neq 0$, προκύπτει ότι η s είναι αντιστρέψιμη. Αντιστρέφουμε την s και λύνοντας ως προς t έχουμε ότι $t = \varphi(s)$ (φ είναι η αντίστροφη της s).
- Η καμπύλη $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ είναι μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

■

Θέμα Εξετάσεων 2.9

Έστω $\beta\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ με $\dot{\beta}(t) = \big(1, 2\sqrt{t}, 2t\big)$. Να βρείτε μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\left\|\dot{\beta}(t)\right\| = \sqrt{1+4t+4t^2} = \sqrt{(2t+1)^2} = |2t+1| = 2t+1$$

Υπολογίζουμε την συνάρτηση μήκους τόξου της β με σημείο εκκίνησης το $\beta(1)$ [5]

$$s(t) = \int_1^t \left\|\dot{\beta}(u)\right\| du = \int_1^t (2u+1)\, du = t^2 + t - 2$$

Τότε, έχουμε ότι

$$t^2 + t - 2 - s = 0$$

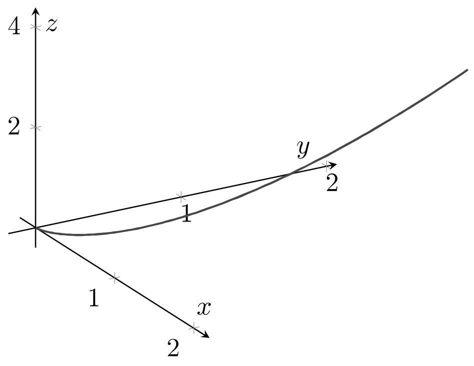
[4] Στην βιβλιογραφία, αρκετές φορές μια λεία καμπύλη με $\dot{\gamma} \neq 0$ καλείται **κανονική** .

[5] Η επιλογή είναι αυθαίρετη θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\beta(t_0)$ με $t_0 > 0$.

και σκοπός μας είναι να λύσουμε ως προς t. Λύνοντας την δευτεροβάθμια ως προς t έχουμε ότι

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{9+4s}}{2} \Rightarrow \varphi(s) = t = \frac{-1 + \sqrt{9+4s}}{2}$$

Απορρίψαμε την δεύτερη λύση, διότι $t > 0$ (η β ορίζεται στο $(0, \infty)$). Συνεπώς, μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β είναι η $\tilde{\beta} = \beta \circ \varphi$.



Η παραμετρημένη καμπύλη β με εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\beta}(t) = \big(1, 2\sqrt{t}, 2t\big)$.

■

Θέμα Εξετάσεων

Έστω $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ομαλή με $\left\|\dot{\beta}(t)\right\| = e^t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β.

Λύση. Υπολογίζουμε την συνάρτηση μήκους τόξου της β με σημείο εκκίνησης το $\beta(0)$

$$s(t) = \int_0^t \left\|\dot{\beta}(u)\right\| du = \int_0^t e^u du = e^t - 1$$

Λύνουμε ως προς t

$$\varphi(s) = t = \ln(s+1), \quad s > -1$$

Η καμπύλη $\tilde{\beta}(s) = \beta \circ \varphi(s)$ είναι μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β. [6] ■

[6]Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \left\|\dot{\beta}(u)\right\| du = e^t$$

και λύνοντας ως προς t έχουμε

$$\varphi(s) = t = \ln s, \quad s > 0$$

3.8 Δεύτερη Κατηγορία Ασκήσεων

Στην συγκεκριμένη κατηγορία ασκήσεων στην εκφώνηση δίνεται μια καμπύλη γ, χωρίς να γνωρίζουμε την καμπυλότητα και την στρέψη της, καθώς και κάποια γεωμετρική ιδιότητα της γ η οποία μεταφράζεται σε μια σχέση της μορφής

$$\gamma(s) = \lambda_1(s) \cdot \mathbf{T}(s) + \lambda_2(s) \cdot \mathbf{n}(s) + \lambda_3(s) \cdot \mathbf{b}(s) + c \tag{3.7}$$

Δικαιολογούμε ότι οι συναρτήσεις $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι παραγωγίσιμες.

Παραγωγίζοντας, λόγω των σχέσεων Frenet 3.5, προκύπτουν στα αριστερά και δεξιά δύο γραμμικοί συνδυασμοί ως προς $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ και λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές από όπου προκύπτει ένα σύστημα ως προς λ, κ, τ και παραγώγους αυτών.

Αρκετές φορές εμπλέκεται μια απλή διαφορική εξίσωση, συνήθως χωριζομένων μεταβλητών, από όπου βρίσκουμε τις ζητούμενες ποσότητες.

Παρακάτω δίνουμε ένα πίνακα με παραδείγματα γεωμετρικών ιδιοτήτων με τις αντίστοιχες μαθηματικές εκφράσεις της μορφής 3.7.

Γεωμετρικές Ιδιότητες	**Μαθηματικές Εκφράσεις**
(α) Υποθέτουμε ότι η ευθεία παράλληλη στο $\mathbf{T}(s)$ και διέρχεται από το σημείο $\gamma(s)$, διέρχεται επίσης από το σταθερό σημείο P	(α) Υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $$\gamma(s) - P = \lambda(s) \cdot \mathbf{T}(s)$$
(β) Για κάθε $s \in I$, η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλη στο $\mathbf{T}(s) - 2 \cdot \mathbf{n}(s)$ διέρχεται από το $(0,0,0)$.	(β) Για κάθε $s \in I$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ ώστε $$\gamma(s) = \lambda(s) \cdot [\mathbf{T}(s) - 2 \cdot \mathbf{n}(s)]$$
(γ) Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\gamma(s) + \mathbf{b}(s), \mathbf{T}(s)$ και $\mathbf{n}(s)$ είναι συγγραμμικά.	(γ) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $k(s), \ell(s), m(s) \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν ώστε $$k(s) \cdot [\gamma(s) + \mathbf{b}(s)] + \ell(s) \cdot \mathbf{T}(s) + m(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0$$

Πίνακας 3.2: Πίνακας εκφράσεων γεωμετρικών ιδιοτήτων μιας καμπύλης σε σχέσης της μορφής 3.7

4.9 Σύνοψη Κεφαλαίου - Τυπολόγιο

1. Αν γ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας, τότε $\mathbf{T} = \dot{\gamma}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της. Στην περίπτωση όπου γ είναι ομαλή, τότε
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$
Τότε $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t)\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, για κάθε $t \in I$.

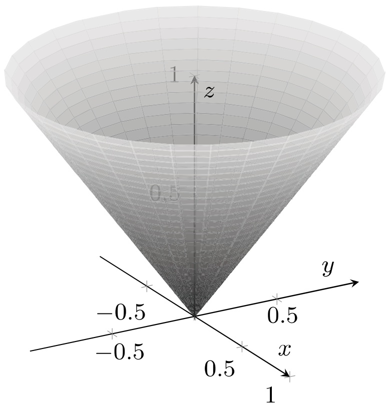
2. Αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας για κάθε $s \in I$ υπάρχει $\kappa_{\text{επ}}(s) \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε
$$\ddot{\gamma}(s) = \kappa_{\text{επ}}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$
Η συνάρτηση $\kappa_{\text{επ}}$ λέγεται προσημασμένη καμπυλότητα της γ. Αν γ είναι ομαλή (όχι κατά ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας) η προσημασμένη καμπυλότητα ισούται με
$$\kappa_{\text{επ}} = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_2 \\ \ddot{\gamma}_1 & \ddot{\gamma}_2 \end{pmatrix}}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

3. Εξισώσεις Frenet : Αν γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας έχουμε ότι
$$\dot{\mathbf{T}} = \kappa_{\text{επ}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{n}} = -\kappa_{\text{επ}} \cdot \mathbf{T}$$
Αν γ είναι ομαλή, όχι κατά ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε
$$\dot{\mathbf{T}} = \kappa_{\text{επ}} \cdot \|\dot{\gamma}\| \cdot \mathbf{n} \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{n}} = -\kappa_{\text{επ}} \cdot \|\dot{\gamma}\| \cdot \mathbf{T}$$

4. Αν $\vartheta(s)$ γωνία περιστροφής μιας ομαλής καμπύλης γ, δηλαδή $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ λεία τέτοια ώστε
$$\dot{\mathbf{T}} = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$$
τότε ισχύει ότι
$$\dot{\varphi} = \kappa_{\text{επ}}$$
αν η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας ενώ
$$\dot{\varphi} = \|\dot{\gamma}\| \cdot \kappa_{\text{επ}}$$
αν γ είναι ομαλή.

5. Το θεμελιώδες θεωρημα της θεωρίας καμπυλών για το $\mathbb{R}^2$ λέει ότι για κάθε κ λεία συνάρτηση, υπάρχει καμπύλη γ μοναδιαίας ταχύτητας στο $\mathbb{R}^2$ με προσημασμένη καμπυλότητα κ.

   Μπορούμε να βρούμε μια τέτοια γ αν βρούμε μια λύση φ της εξίσωσης $\dot{\varphi} = \kappa$ και έτσι βρίσκοντας το $\mathbf{T}$ βρίσκουμε το $\dot{\gamma}$ και κατ΄ επέκταση την γ. Η γ είναι μοναδική ως προς ευθεία ισομετρία.



Η παραμετρική επιφάνεια $X(t,r) = (r\cos t, r\sin t, r)$.

Άσκηση 5.4

Έστω $X : U \to \mathbb{R}^3$ παραμετρική επιφάνεια όπου $U = (0,\infty)^2$ με συνιστώστες πρώτης θεμελιώδους μορφής

$$E(u,v) = v \quad F(u,v) = \sqrt{uv} \quad G(u,v) = 5u$$

(α) Να υπολογίστε :

i. Το μήκος της καμπύλης $\alpha(t) = X\left(2t, \frac{t}{2}\right)$, $1 \le t \le 2$.

ii. Το εμβαδόν του $X(A)$, όπου A είναι το τετράγωνο με κορυφές

$$(1,1),\ (1,4),\ (4,1),\ (4,4)$$

iii. Το εσωτερικό γινόμενο $\langle X_{vv}, X_u\rangle$.

(β) Να βρεθεί μια ορθογώνια αναπαραμέτρηση της X.

5.4. (α) i. Αν $\beta(t) = \left(2t, \frac{t}{2}\right)$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι

$$\dot{\alpha}(t) = 2X_u(\beta(t)) + \frac{1}{2}X_v(\beta(t))$$

συνεπώς ισχύει ότι

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = 2^2 \cdot E(\beta(t)) + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot F(\beta(t)) + \frac{1}{4}\cdot G(\beta(t)) = \frac{13t}{2}$$

άρα το ζητούμενο μήκος ισούται με

$$\ell(\alpha) = \int_1^2 \|\dot{\alpha}(t)\|\,dt = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\int_1^2 \sqrt{t} = \frac{\sqrt{26}}{3}\cdot\left(\sqrt{8}-1\right)$$

6.17 Θέματα Εξετάσεων

Θ.Ε. 6.1. Έστω $\Omega = \{(u, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ και $\sigma \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ με

$$\sigma(u, \vartheta) = (u^2 \cos \vartheta, u^2 \sin \vartheta, u).$$

και έστω $\mathcal{S} = \mathrm{Im}(\sigma)$.

(α) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες, τις κύριες διευθύνσεις και την καμπυλότητα Gauss της σ.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τοπική ισομετρία $F : \mathrm{Im}(\sigma) \to \pi$, όπου $\mathrm{Im}(\sigma)$ είναι η εικόνα της σ και π το επίπεδο $z = 0$.

(γ) Να υπολογίσετε την συνάρτηση γεωδαισιακής καμπυλότητας $k_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της καμπύλης $\gamma(t) = \sigma(1, t)$.

(δ) Να υπολογίσετε τα σύμβολα Christoffel Γ^1_{22} και Γ^2_{22} της σ στο Ω.

(ε) Να αποδείξετε ότι μια ομαλή απεικόνιση $F \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ με

$$F(\sigma(u, \vartheta)) = \sigma\left(u, \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι τοπική ισομετρία.

Θ.Ε. 6.2. Έστω $\sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $\sigma(u, v) = \left(u, u^2, v\right)$. Αφού κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

(α) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες, κύριες διευθύνσεις και την καμπυλότητα Gauss της σ.

(β) Εξετάσθε αν υπάρχει τοπική ισομετρία $F \colon \mathrm{Im}\sigma \to \mathbb{S}^2$, όπου $\mathrm{Im}\sigma$ είναι η εικόνα της σ και $\mathbb{S}^2$ η σφαίρα ακτίνας 1 στο $\mathbb{R}^3$.

(γ) Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της γεωδαισιακής καμπυλότητας $\kappa_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ της καμπύλης

$$\delta(t) = \sigma(t, 0).$$

(δ) Έστω καμπύλη $\gamma(s) = \sigma\left(\beta(s)\right)$ μοναδιαίας ταχύτητας, η οποία έχει κάθετη καμπυλότητα $k_n(s) = 0$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί η κυρτή γωνία των διανυσμάτων $\dot{\gamma}(s)$ και $\sigma_u\left(\beta(s)\right)$.

Θ.Ε. 6.3. (α) Να δείξετε ότι υπάρχει ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα $\kappa(s) = s$ και στρέψη $\tau(s) = -s$, για κάθε $s > 0$.

Έστω $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ το τρίεδρο Frenet της γ.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερό διάνυσμα $c \neq 0$ που σχηματίζει με το $\mathbf{T}(s)$ γωνία $45°$, για κάθε $s > 0$.

Ορίζουμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X(u, v) = u \cdot \mathbf{T}(v) + \mathbf{n}(v), \quad u, v > 0$$

(γ) Να βρείτε τις συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής E, F, G και το μοναδιαίο κάθετο N της X.

(δ) Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss της X.

(ε) Βρείτε μια ορθογώνια αναπαραμέτρηση της X.

Θ.Ε. 6.4. Έστω $\sigma \colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\sigma(u, \vartheta) = \left(u \cos \vartheta, u \sin \vartheta, u^2\right)$$

(α) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες, κύριες διευθύνσεις και την καμπυλότητα Gauss της σ.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομαλή απεικόνιση $F \colon \mathrm{Im}\sigma \to \Pi$, όπου $\mathrm{Im}\sigma$ είναι η εικόνα της σ και Π το επίπεδο με εξίσωση $z = 0$, η οποία είναι τοπική ισομετρία.

(γ) Να υπολογίσετε την γεωδαισιακή καμπυλότητα $\kappa_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της καμπύλη $\alpha(u) = \sigma(1, u)$.

(δ) Έστω καμπύλη $\beta(t) = \sigma(t, \vartheta(t))$, όπου $\vartheta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία με κάθετη καμπυλότητα

$$\kappa_n(t) = 2\left(1 + 4t^2\right)^{-3/2}$$

Να βρεθεί η κυρτή γωνία των διανυσμάτων $\dot{\beta}(t)$ και $\sigma_u\left(t, \vartheta(t)\right)$.

8.3 Επαναληπτικές Ασκήσεις

8.3.1 Επαναληπτικά Θέματα στις Καμπύλες

Θέμα Εξετάσεων 8.1

(α) Έστω $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη με $\dot{\beta}(t) = e^t(\cos t, \sin t)$. Να βρείτε μια αναπαραμέτρηση γ της β με μοναδιαία ταχύτητα.

(β) Έστω $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$ και προσημασμένη καμπυλότητα $\kappa_\gamma(s) = s$.

i Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου $s \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εφαπτόμενη ευθεία της γ στο s είναι κάθετη στον άξονα των x.

ii Να βρείτε μια αναπαραμέτρηση $\tilde{\gamma}\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ της γ με προσημασμένη καμπυλότητα $\kappa_{\tilde{\gamma}}(t) = \ln t$.

(γ) Έστω $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με τρίεδρο Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Αν είναι γνωστό ότι

$$\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{n}}(0) = (-1, 1, 1)$$

να υπολογίσετε την καμπυλότητα και την απόλυτη τιμή της στρέψης της γ στο 0.

Λύση. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση μήκους τόξου s της γ με σημείο εκκίνησης του $\gamma(0)$. Έτσι έχουμε ότι

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{e^{2u}\cos^2 u + e^{2u}\sin^2 u}\, du = e^t - 1$$

Τότε, λύνοντας ως προς t έχουμε ότι

$$\varphi(s) = t = \ln(s + 1)$$

Συνεπώς, η καμπύλη $\gamma = \beta \circ \varphi$ είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της β.