

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Μήκος Τύπου

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du$$

Καμπυλότητα

M.T. $\kappa_{\gamma}(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$
Ομαλή $\kappa_{\gamma}(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$

Επίπεδη Καμπυλότητα

$$\kappa_*(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

Στρέψη

Μον.Ταχ. $\tau_{\gamma}(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$
Ομαλή $\tau_{\gamma}(t) = \frac{\langle \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$

Τριζόδρο Frenet (Μον. Ταχ.)

$\mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s)$ **μοναδιαίο εφαπτόμενο**
 $\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{\kappa(s)}$ **πρώτο μον. κάθετο**

$\mathbf{b}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{n}(s)$
 $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{T}(s)$
 $\mathbf{T}(s) = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s)$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}$$

Τριζόδρο Frenet (Ομαλής)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \dot{\mathbf{n}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \|\dot{\gamma}\| \kappa & 0 \\ -\|\dot{\gamma}\| \kappa & 0 & \|\dot{\gamma}\| \tau \\ 0 & -\|\dot{\gamma}\| \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}$$

Επίπεδες Καμπύλες (Μον. Ταχ.)

Αν $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ τότε

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s)) \quad \text{και} \quad \mathbf{n}(s) = (-\dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_1(s))$$

με

$$\dot{\mathbf{T}}(s) = \kappa_s \cdot \mathbf{n}(s) \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa_s \cdot \mathbf{T}(s)$$

Επίπεδες Καμπύλες (Ομαλής)

Αν $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ τότε

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \cdot (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \quad \text{και} \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \cdot (-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t))$$

με

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = (\|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \kappa_s(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{n}}(t) = -(\|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \kappa_s(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$$

Γωνία Περιστροφής (Μον. Ταχ.)

$$\varphi(s) = \widehat{\mathbf{T}(s), e_1}, \quad \dot{\varphi}(s) = \kappa_s$$

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Καμπυλών του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} s \in J \\ \kappa, \tau : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ λείες} \\ \kappa > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma \text{ μον. ταχ.} \\ \kappa_{\gamma} = \kappa \\ \tau_{\gamma} = \tau \end{cases}$$

Επιπλέον, κάθε άλλη $\tilde{\gamma}$ μ.τ. με ίδια καμπυλότητα και στρέψη είναι ευθέως ισομετρική με την γ .

Γενικευμένη Έλκα

Μια $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται **γενικευμένη έλκα** αν το $\mathbf{T}(t)$ σχηματίζει σταθερή γωνία ϑ με σταθερό $v \in \mathbb{R}^3$, για κάθε $t \in \mathbf{I}$. Ισοδύναμα γ είναι γεν. έλκα αν $\tau(t)/\kappa(t)$ σταθερό.

Είδος Καμπύλης

- Αν $\kappa = 0$, τότε γ είναι **ευθεία**.
- Αν $\kappa > 0$ και $\tau = 0$, τότε γ είναι **επίπεδη**.
- Αν κ σταθ. και $\tau = 0$, τότε γ είναι **κύκλος**.
- Αν κ σταθ. και τ σταθ., τότε γ είναι **κυκλική έλκα**.
- Αν $\kappa > 0$ και τ/κ σταθ., τότε γ είναι **γενικευμένη έλκα**.

Παραμετρική Επιφάνεια

$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και

- σ είναι διαφορίσιμη
- $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ στο U

Η σ είναι ομαλή π.ε. αν $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή

- $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ συνεχής
- σ είναι 1-1
- $\sigma^{-1} : \sigma(U) \rightarrow U$ συνεχής

Εφαπτόμενος Χώρος και Μοναδιαίο Κάθετο

Αν $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ π.ε. και $q \in U$, ο **εφαπτόμενος χώρος** της σ στο q είναι

$$\mathbf{T}_q \sigma = \{\lambda \cdot \sigma_u(q) + \mu \cdot \sigma_v(q) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Το **μοναδιαίο κάθετο** της σ στο q είναι

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)}{\|\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)\|}$$

1η Θεμελιώδης Μορφή

Αν $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ π.ε. και $q \in U$ η **1η θεμελιώδης μορφή** της σ στο q είναι η απεικόνιση

$$\mathbf{I}_q : \mathbf{T}_q \sigma \times \mathbf{T}_q \sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{I}_q(v, w) = \langle v, w \rangle$$

Αν $v = \lambda \cdot \sigma_u(q) + \mu \cdot \sigma_v(q)$ και $w = \lambda' \cdot \sigma_u(q) + \mu' \cdot \sigma_v(q)$

$$\mathbf{I}_q(v, w) = (\lambda \lambda') E(q) + (\lambda \mu' + \lambda' \mu) F(q) + (\mu \mu') G(q)$$

με

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \quad G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$$

Επίσης,

$$\|v\|^2 = \mathbf{I}_q(v, v) = \lambda^2 E + 2\lambda \mu F + \mu^2 G$$

Καμπύλη σε Επιφάνεια

Αν $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ π.ε., μια **καμπύλη** γ στην σ είναι

$$\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \sigma(U), \quad \gamma(t) = \sigma(\beta(t))$$

με

$$\beta(t) = (u(t), v(t))$$

με

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t) \cdot \sigma_u(\beta(t)) + \dot{v}(t) \cdot \sigma_v(\beta(t))$$

και

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = (\dot{u})^2 E + 2\dot{u}\dot{v} F + (\dot{v})^2 G$$

Μήκος Καμπύλης

Αν

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \sigma(U), \quad \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

τότε

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\dot{u})^2 E + 2\dot{u}\dot{v}F + (\dot{v})^2 G} dt$$

Εμβαδόν Χωρίου

Αν $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{R} \subseteq U$, τότε

$$\mathbf{E}\mu\mathbf{B}(\sigma(\mathcal{R})) = \iint_{\mathcal{R}} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Γονία Μεταξύ Καμπυλών σε Επιφάνεια

i. Βρίσκω σημεία τομής $\gamma(t) = \beta(s) \iff p = (u_0, v_0) = \gamma(t_0) = \beta(s_0)$ (ενδέχεται να είναι περισσότερα από ένα σημεία τομής).

ii. Αναζητώ $\vartheta = \widehat{\dot{\gamma}(t_0), \dot{\beta}(s_0)}$

iii. Χρησιμοποιώ ότι

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \dot{\gamma}(t_0), \dot{\beta}(s_0) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t_0)\| \cdot \|\dot{\beta}(s_0)\|}$$

Τελεστής Σχήματος - Απεικόνιση Weingarten

Αν $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομαλή π.ε. και $q \in U$, ο **τελεστής σχήματος** ή **απεικόνιση Weingarten** είναι η γραμμική απεικόνιση $\mathcal{W}_q: \mathbf{T}_q \sigma \rightarrow \mathbf{T}_q \sigma$ τ.ω.

$$\mathcal{W}_q(\sigma_u) = -\mathbf{N}_u(q) \quad \mathcal{W}_q(\sigma_v) = -\mathbf{N}_v(q)$$

2η Θεμελιώδης Μορφή

Αν $v = \lambda \cdot \sigma_u(q) + \mu \cdot \sigma_v(q)$ και $w = \lambda' \cdot \sigma_u(q) + \mu' \cdot \sigma_v(q)$ τότε η **2η δευτερη θεμελιώδης μορφή** είναι

$$\mathbf{II}_q(v, w) = (\lambda\lambda')E(q) + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)F(q) + (\mu\mu')G(q)$$

με

$$e(q) = \langle \sigma_{uu}(q), \mathbf{N}(q) \rangle \quad f(q) = \langle \sigma_{uv}(q), \mathbf{N}(q) \rangle \quad g(q) = \langle \sigma_{vv}(q), \mathbf{N}(q) \rangle$$

Πίνακας Τελεστή Σχήματος

$$\mathcal{W}_q(\sigma_u(q)) = a \cdot \sigma_u(q) + c \cdot \sigma_v(q)$$

$$\mathcal{W}_q(\sigma_v(q)) = b \cdot \sigma_u(q) + d \cdot \sigma_v(q)$$

Αν A ο πίνακας της $\mathcal{W}_q$ ως προς την βάση $\{\sigma_u(q), \sigma_v(q)\}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Κύριες Καμπυλότητες

Οι ιδιοτιμές $\kappa_1(q)$ και $\kappa_2(q)$ του $\mathcal{W}_q$ λέγονται **κύριες καμπυλότητες** της σ στο q και τα ιδιοδιανύσματα του $\mathcal{W}_q$ λέγονται **κύρια διανύσματα**. $[\mathcal{W}_q(v) = \lambda \cdot v]$. Αν $\{v_1, v_2\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{T}_q \sigma$ από ιδιοδιανύσματα του $\mathcal{W}_q$, τότε τα v_1, v_2 λέγονται **λέγονται κύριες διευθύνσεις**.

Ομφαλικά Σημεία

Αν $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ π.ε. και $q \in U$, τότε το σημείο q λέγεται **ομφαλικό** αν $\kappa_1(q) = \kappa_2(q)$.

Αν U ανοικτό και συνεκτικό και κάθε $q \in U$ είναι ομφαλικό, τότε προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\kappa = \kappa_1 = \kappa_2: U \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι σταθερή και η σ είναι τμήμα επιπέδου ή τμήμα σφαίρας.

Καμπυλότητα Gauss - Μέση Καμπυλότητα

Η **καμπυλότητα Gauss** είναι

$$\mathbf{K} = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2}$$

Η **μέση καμπυλότητα** είναι

$$\mathbf{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{G \cdot e - 2F \cdot f + Eg}{2(E \cdot G - F^2)}$$

Χαρακτηρισμός Κύριων Διευθύνσεων

Ένα $v = \lambda \cdot \sigma_u(q) + \mu \cdot \sigma_v(q) \in \mathbf{T}_q \sigma$ είναι κύριο ανν

$$\det \begin{pmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E(q) & F(q) & G(q) \\ e(q) & f(q) & g(q) \end{pmatrix} = 0$$

Βασικά Εσωτερικά Γινόμενα

$$\langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \quad \text{και} \quad \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle = \frac{1}{2} E_v$$

$$\langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \quad \text{και} \quad \langle \sigma_{vv}, \sigma_v \rangle = \frac{1}{2} G_v$$

$$\langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \quad \text{και} \quad \langle \sigma_u, \sigma_{vv} \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

Σύμβολα Christoffel

$$\sigma_{uu}(q) = \Gamma_{11}^1(q) \cdot \sigma_u(q) + \Gamma_{11}^2(q) \cdot \sigma_v(q) + e(q) \cdot \mathbf{N}(q)$$

$$\sigma_{uv}(q) = \Gamma_{12}^1(q) \cdot \sigma_u(q) + \Gamma_{12}^2(q) \cdot \sigma_v(q) + f(q) \cdot \mathbf{N}(q)$$

$$\sigma_{vu}(q) = \Gamma_{21}^1(q) \cdot \sigma_u(q) + \Gamma_{21}^2(q) \cdot \sigma_v(q) + f(q) \cdot \mathbf{N}(q)$$

$$\sigma_{vv}(q) = \Gamma_{22}^1(q) \cdot \sigma_u(q) + \Gamma_{22}^2(q) \cdot \sigma_v(q) + g(q) \cdot \mathbf{N}(q)$$

Τύποι για Σύμβολα Christoffel

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad \text{και} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad \text{και} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad \text{και} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

Θεώρημα Gauss Egregium

Η καμπυλότητα Gauss μιας ομαλής επιφάνειας είναι αναλλοίωτη ως προς τοπικές ισομετρίες. Η καμπυλότητα Gauss μιας ομαλής π.ε. εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής. Αν $F \equiv 0$, τότε

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right]$$

Αν $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ τοπική ισομετρία, τότε

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 \circ F$$

Βασικές Καμπυλότητες Gauss

i. **Σφαίρα Ακτίνας R** : $\mathbf{K} = 1/R^2$

ii. **Επίπεδο/Κύλινδρος**: $\mathbf{K} = 0$

Κάθετη και Γεωδαισιακή Καμπυλότητα

Αν $\gamma: \mathbf{I} \rightarrow \sigma(U)$ μον. ταχ. τότε

$$\kappa_n(s) = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \mathbf{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \quad \text{κάθετη καμπυλότητα}$$

$$\kappa_g(s) = \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{N}(s) \times \dot{\gamma} \rangle \quad \text{γεωδαισιακή καμπυλότητα}$$

Αν $\text{An } \gamma: \mathbf{I} \rightarrow \sigma(U)$ ομαλή, τότε

$$\kappa_n(t) = \frac{\mathbf{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\mathbf{I}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \quad \text{κάθετη καμπυλότητα}$$

Γενικά ισχύει ότι

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(t) + \kappa_g^2(t)$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της γ . Η γ θα λέγεται **γεωδαισιακή** αν $\kappa_g = 0$ στο $\mathbf{I}$.

Θεώρημα Euler

Έστω $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομαλή π.ε. και λεία καμπύλη γ μον. ταχ. πάνω στην επιφάνεια $\sigma(U)$ με $\gamma(s) = \sigma(\beta(s))$. Έστω επίσης v_1, v_2 μία ορθοκανονική βάση του εραπτόμενου χώρου $\mathbf{T}_q \sigma$, με $q = \beta(s_0)$, που αντιστοιχεί στις κύριες καμπυλότητες $\kappa_1(q), \kappa_2(q)$. Αν $\vartheta(s_0)$ η γωνία μεταξύ του $v = \dot{\gamma}(s_0)$ και του v_1 , τότε ισχύει ότι:

$$\kappa_n(s_0) = \kappa_1(q) \cdot \cos^2(\vartheta(s_0)) + \kappa_2(q) \cdot \sin^2(\vartheta(s_0))$$